Relazioni

e

funzioni

1. PRODOTTO CARTESIANO DI DUE INSIEMI

Si dice "**prodotto cartesiano**" di due insiemi A e B,
l'insieme $A \times B$ (leggi: "A cartesiano B") formato da tutte le **coppie ordinate**
aventi come *primo elemento* un elemento di A, e come *secondo elemento* un elemento di B.

In simboli: $\boxed{A \times B = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\}}$

ESEMPIO

Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{s, t\}$,
allora $A \times B = \{ (1,s); (1,t); (2,s); (2,t); (3,s); (3,t) \}$

	s	t
1	$(1, s)$	$(1, t)$
2	$(2, s)$	$(2, t)$
3	$(3, s)$	$(3, t)$

IM-POR-TAN-TE

Le GRAFFE indicano "INSIEME",
es. $B = \{s, t\}$ (NON CONTA L'ORDINE);
le TONDE indicano invece "COPPIA ORDINATA",
es. $(1, s)$ (PRIMA 1 e POI s)

3. PREDICATI

Si dice "predicato" un'affermazione che si fa riguardo a uno, due o più "argomenti", **che possono essere oggetti concreti, oggetti astratti, persone**.

Esempi:

- ... è femmina (predicato monoargomentale)
- ... è padre di ... (predicato biargomentale)
- ... e ... sono primi fra loro (predicato biargomentale)
- … * … = … + … (predicato a quattro argomenti)

- ❑ **Un predicato monoargomentale definisce un sottoinsieme**
  (di un dato “insieme ambiente”, o “insieme universo”);
- ❑ **un predicato biargomentale definisce una relazione**
  (fra due dati insiemi, presi in un certo ordine).

Nel linguaggio di tutti i giorni, la parola RELAZIONE è usata in contesti molto diversi.
Tuttavia, il suo significato è sempre quello di "legame, collegamento".
Esempi:

a) " La parsimonia di quell'uomo è in RELAZIONE con la sua povertà "
b) " C'è una RELAZIONE fra il giardiniere e la padrona di casa "
c) " La camorra napoletana è in RELAZIONE con la malavita cinese "

In Matematica, la parola "relazione" è particolarmente importante quando viene impiegata per indicare un "**COLLEGAMENTO FRA DUE INSIEMI**".

In definitiva, tale relazione stabilisce un INSIEME DI COPPIE, sottoinsieme di $A \times B$:

Si dice RELAZIONE fra due insiemi A, B
un legame fra gli elementi di A e gli elementi di B,
che è espresso da un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.

Detta R una relazione,
per indicare che a (elemento dell'insieme A) è in relazione con b (elemento dell'insieme B) si usa, indifferentemente, una delle due scritture

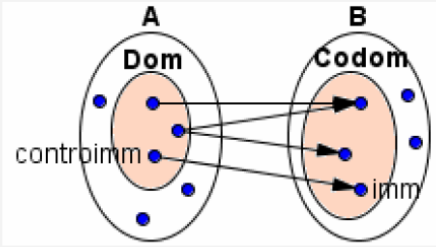
- **a R b** ("notazione infissa")
- **R(a, b)** ("notazione prefissa")

Sinonimo di "relazione" è "**corrispondenza**".

Data una relazione R fra un insieme A ed un insieme B
(si preferisce dire, anche per mettere in risalto l'ordine: "**di**" **un insieme A** "**verso**" **un insieme B**),

- **A** si dice "**INSIEME DI PARTENZA**" e **B** si dice "**INSIEME DI ARRIVO**";
- **il sottoinsieme di A costituito da quegli elementi di A, che sono in relazione R con almeno un elemento di B, si dice "DOMINIO" di R** (in pratica, il *dominio* di una relazione R di A verso B è **il sottoinsieme di A formato dagli elementi da cui parte almeno una freccia**);
- **invece, si dice "CODOMINIO" di R il sottoinsieme di B costituito da quegli elementi di B ai quali arriva almeno una freccia**.
- **Se a R b, allora b si dice "IMMAGINE" di a, mentre a si dice "CONTROIMMAGINE" di b.**

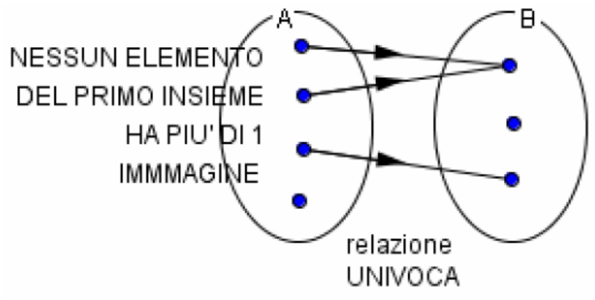
Dunque
- **il DOMINIO di R è l'insieme degli elementi dell'insieme di partenza A, che hanno almeno una immagine;**
- **e il CODOMINIO di R è l'insieme degli elementi dell'insieme di arrivo B, che hanno almeno una controimmagine.**

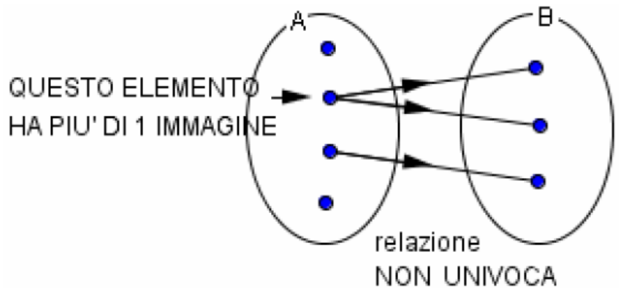


Se insieme di partenza e insieme di arrivo coincidono, si parlerà di "relazione **interna** ad un insieme".

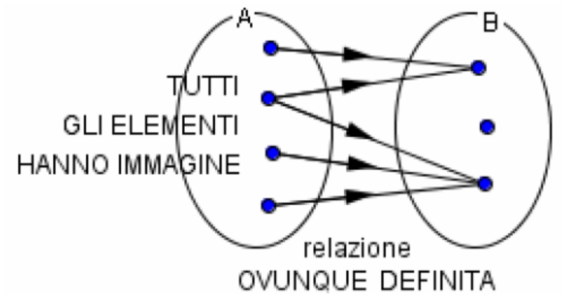
Ecco un modo efficace di rappresentare una relazione. →
In un riferimento cartesiano, si elencano
sull'asse orizzontale gli elementi dell'insieme di partenza X,
e su quello verticale gli elementi dell'insieme di arrivo Y;
nel caso sia x R y , si evidenzia poi con un tondino il punto di intersezione fra la retta verticale per x e la retta orizzontale per y.

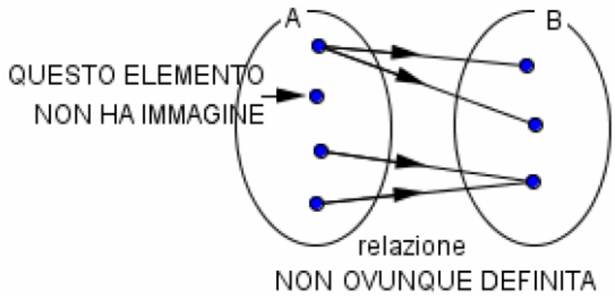
- **Una relazione di A in B si dice "UNIVOCA"** (alcuni testi dicono: "funzionale") **se ad un elemento di A non corrisponde mai più di un elemento di B**; ossia:
  - se da ogni elemento di A parte al massimo una freccia
  - se ogni elemento di A ha al massimo una immagine
  - se non c'è nessun elemento di A da cui parta più di una freccia
  - se non c'è nessun elemento di A che abbia più di una immagine.





- **Una relazione di A in B si dice "OVUNQUE DEFINITA" se ad ogni elemento di A corrisponde almeno un elemento di B**; ovvero
  - se da ogni elemento di A parte almeno una freccia
  - se ogni elemento di A ha almeno una immagine
  - se il dominio della relazione coincide con l'insieme di partenza A.





1) Dati i due insiemi $X = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e $Y = \{7, 8, 9, 10, 11\}$ e la seguente relazione di X verso Y: R = "... è divisore di ..."

a) disegna il diagramma a frecce e anche il diagramma cartesiano della relazione; determina dominio e codominio di questa;

b) fra le seguenti affermazioni, distingui le vere dalle false:
I) 2 R 7 II) R(2, 8) III) R(8,2) IV) 3 non ha immagini V) 11 non ha controimmagini

2) Nell'insieme $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ rappresenta, sia con un diagramma a frecce che cartesianamente, le relazioni seguenti:

a) $x \text{ R } y \Leftrightarrow x$ *è divisibile per* y

b) $x \text{ R } y \Leftrightarrow x$ *è divisore di* y

c) $x \text{ R } y \Leftrightarrow x$ *ha più divisori di* y

d) $x \text{ R } y \Leftrightarrow x + y$ *è pari*

Definizione

♥ **Si ha una FUNZIONE quando si hanno due grandezze variabili, legate fra loro in modo che ad ogni valore di una di esse (variabile indipendente) corrisponde UNO E UN SOLO valore dell'altra (variabile dipendente).**

Di preferenza,
la variabile indipendente si indica con la lettera x,
e la variabile dipendente con y,
ma a volte è più opportuna una scelta dei simboli diversa.

Se un'automobile si muove con la velocità costante di 1,5 metri al secondo,

- dopo 1 secondo dall'istante in cui facciamo scattare il cronometro avrà percorso 1,5 m,
- dopo 2 secondi 3 m,
- dopo 3 secondi 4,5 m,
- dopo ½ secondo 0,75 m,
- ecc. ecc.

In questo caso la variabile indipendente è il tempo (che potremmo indicare con t)
e la variabile dipendente è lo spazio percorso (lo indicheremo con s).
La funzione, cioè il legame fra le due variabili, si può esprimere mediante la formula $s = 1,5\ t$.
Se chiamiamo questa funzione D (D come Distanza), avremo: $s = D(t) = 1,5\ t$.
E potremo scrivere, ad esempio: $D(2) = 3$, $D(10) = 15$, ecc.

Supponiamo di misurare il tempo in ore, e le temperature in gradi centigradi. Immaginiamo
di piazzarci con un termometro davanti al cancello della scuola e di far scattare il cronometro.

La nostra unità di misura per i tempi sarà la durata di 1 ora.

La temperatura, all'istante $t = 0$, avrà un certo valore,
all'istante $t = 1$ (cioè dopo 1 ora) avrà un certo altro valore (>, < o eventualmente = al precedente),
all'istante $t = 1,4$ (cioè dopo 1 ora e 4/10 di ora, 1 ora e 24 minuti) un certo altro valore, ecc.

E' chiaro che, in questo caso, non c'è alcuna formula
che permetta di calcolare la temperatura conoscendo il valore di t.

Si ha ancora una funzione,
perché ad ogni valore del tempo t corrisponde 1 e un solo valore della temperatura T,
ma questa funzione NON è esprimibile mediante una formula matematica.

Si ha cioè una funzione "**empirica**",
perché solo l'osservazione diretta può farci conoscere qual è il valore
che la variabile dipendente assume in corrispondenza di un certo valore della variabile indipendente.
Le funzioni degli esempi precedenti erano invece funzioni "matematiche".

*Una funzione si dice "**matematica**" (o anche "analitica") quando esiste una "legge" che consenta di passare da un dato valore della variabile indipendente al corrispondente valore della variabile dipendente, semplicemente effettuando dei calcoli. Si dice "**empirica**" in caso contrario.*

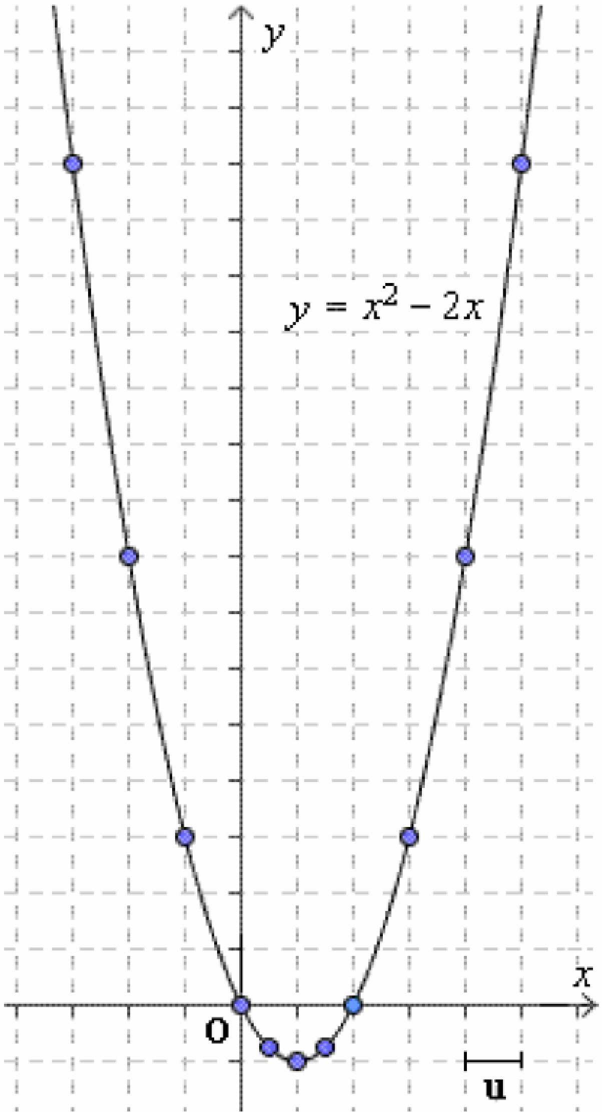
♥ Si dice "dominio" o "campo di esistenza" (C.E.) di una funzione, l'insieme dei valori che è possibile attribuire alla variabile indipendente, affinché esista il corrispondente valore della variabile dipendente.

Di una funzione, si può disegnare il grafico

Dunque, supponiamo di avere una determinata funzione $y = f(x)$, e di volerne tracciare il grafico.
Molto semplice.

- Diamo a x un valore (badando, è ovvio, che questo valore faccia parte del "dominio" della funzione), e calcoliamo il corrispondente valore di y
- disegniamo il punto che ha come coordinate QUEI due valori (x, y)
- facciamo questo per un opportuno insieme di valori di x
- congiungiamo i punti ottenuti.

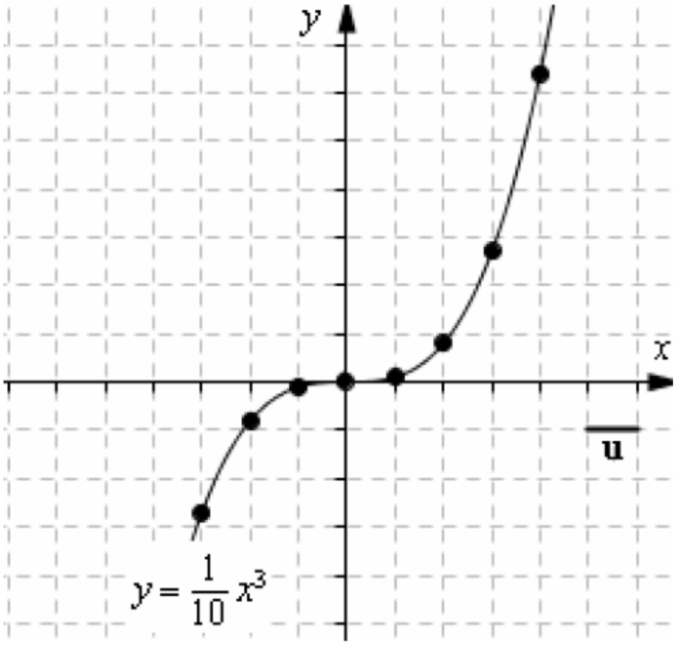
Ed ecco il grafico!

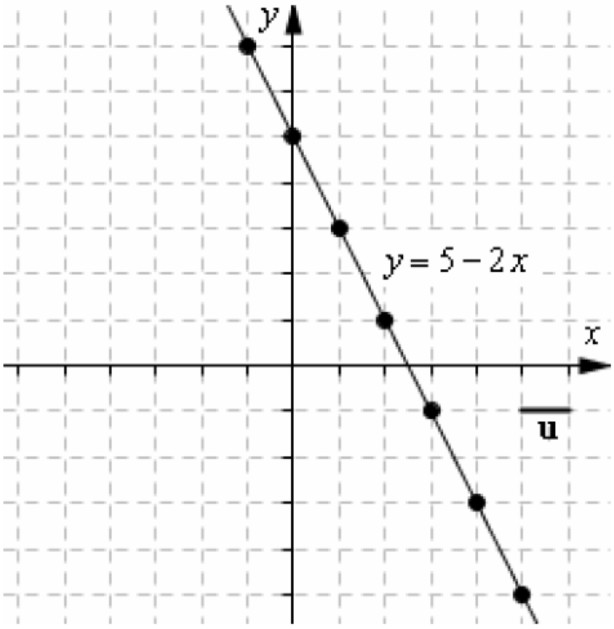


x	$y = f(x) = x^2 - 2x$
0	0
1	-1
2	0
3	3
4	8
5	15
-1	3
-2	8
-3	15
$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$
$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - 3 = -\frac{3}{4}$

Il grafico ci fa cogliere con immediatezza tante informazioni sull' "andamento" della funzione, e sulle sue caratteristiche. Ad esempio,

- possiamo notare che il valore minimo che la y può assumere è -1 (valore che si ottiene per $x = 1$)
- vediamo che la y decresce, al crescere di x, quando è $x<1$, mentre cresce, al crescere di x, quando è $x>1$
- osserviamo la presenza di una "simmetria", nel senso che se due valori di x stanno uno a sinistra e l'altro a destra dell'ascissa 1, ma alla stessa distanza, ad essi corrispondono due valori di y uguali fra loro
- … eccetera.


y
x
u
$y = \frac{1}{10}x^3$


y
x
$y = 5 - 2x$
u

10. RIPASSO DEL CONCETTO DI FUNZIONE

Abbiamo già parlato di "funzioni" (alle pagine 430-431, che ti invito a rileggere) stabilendo la seguente

Definizione - **Si ha una funzione quando si hanno due grandezze variabili, legate fra loro in modo che ad ogni valore di una di esse (variabile indipendente) corrisponde UNO E UN SOLO valore dell'altra (variabile dipendente).**

Di norma (non sempre!) la variabile indipendente si indica con la lettera x, e la dipendente con y. Inoltre, come avevamo già precisato a pagina 431, alla fin fine non è poi indispensabile che proprio "ad ogni ... " corrisponda un valore; è invece essenziale che quando il valore esiste, esso sia UNICO. Di questo fatto riparleremo anche nelle pagine che seguono.

11. UNA "FUNZIONE" NON E' ALTRO CHE UN CASO PARTICOLARE DI RELAZIONE
(è una relazione fra due insiemi, tale che ad ogni elemento dell'insieme di partenza corrisponde UNO ED UN SOLO elemento dell'insieme di arrivo)

Definizione (**definizione GENERALE di "funzione"**):

si dice "FUNZIONE", o "APPLICAZIONE",
una relazione di un insieme A verso un insieme B,
tale che ad ogni elemento di A corrisponde UNO ED UN SOLO elemento di B
(= tale che ogni elemento di A ha una e una sola immagine).

Con riferimento ai diagrammi a frecce, le funzioni sono quelle relazioni tali che da ogni elemento dell'insieme di partenza A parte **una e una sola** freccia.

Il valore di y DIPENDE dal valore che abbiamo attribuito a x.

$f: x \rightarrow y$ ("f *fa passare da* x *a* y")

$y = f(x)$ (*leggi*: "y *uguale* f *di* x", *con lo stesso significato della scrittura precedente*)

$$\underbrace{\boxed{y}}_{\text{nome della var. dip.}} = \underbrace{\boxed{f}}_{\text{nome della funzione}}\left(\underbrace{\boxed{x}}_{\text{nome della var. ind.}}\right)$$

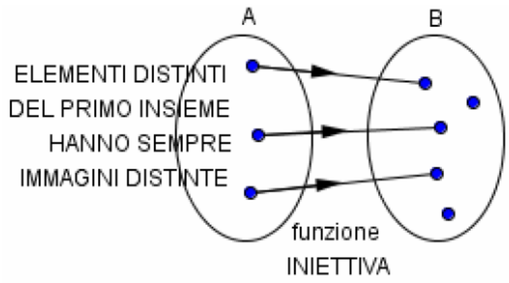
Possiamo perciò riformulare la definizione di "funzione" come segue:
Definizione - Si dice "FUNZIONE" (o "applicazione") una RELAZIONE che sia UNIVOCA e (ma vedi la PRECISAZIONE IMPORTANTE qui sotto) OVUNQUE DEFINITA

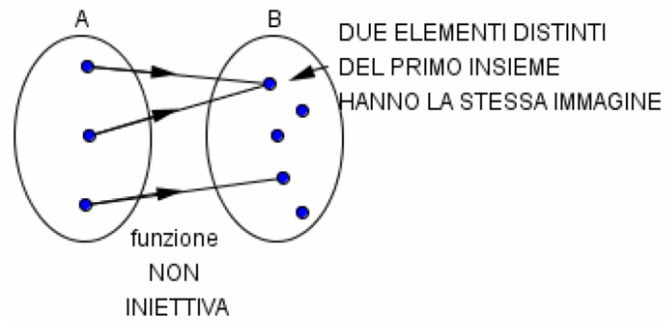
PRECISAZIONE IMPORTANTE

C' è da chiarire subito una questione che potrebbe essere fonte di parecchi equivoci.
Consideriamo, ad esempio, la relazione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ seguente:
ad ogni numero reale x facciamo corrispondere il suo reciproco $1/x$.
In base a quanto abbiamo detto, si dovrebbe affermare che questa relazione non è una funzione, perché, sebbene sia univoca, NON è ovunque definita: infatti, lo 0 non ha reciproco.
In casi come questo, invece, di solito si fa così: si *restringe l'insieme di partenza,* fino a farlo coincidere con il dominio, e si dice che si ha una funzione. … La cosa è un po' strana …
… D'altra parte, certe usanze si sono ormai consolidate storicamente, e a questo punto bisogna accettarle.
La corrispondenza che associa al numero x il numero $1/x$
sarà allora considerata una funzione, di dominio $\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$.
In definitiva, riassumendo:

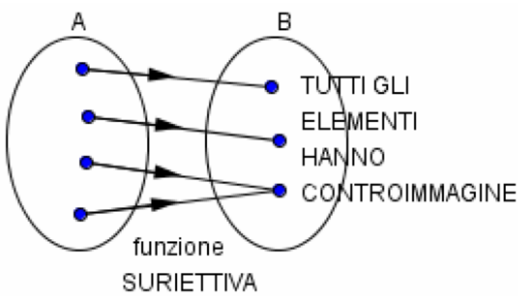
… nella pratica, UNA RELAZIONE UNIVOCA, ANCHE SE NON È OVUNQUE DEFINITA, VIENE UGUALMENTE CONSIDERATA UNA FUNZIONE; infatti, si finisce sempre per RESTRINGERE L'INSIEME DI PARTENZA, FACENDOLO COINCIDERE CON IL DOMINIO.

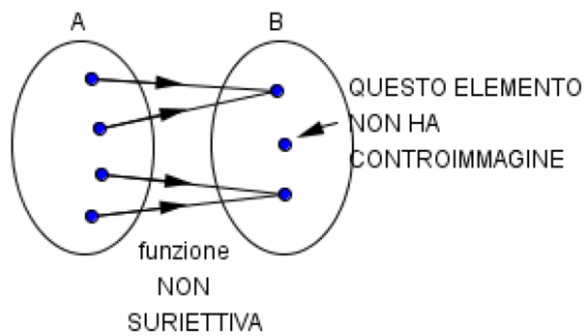
- **Una funzione di A in B si dice "INIETTIVA"**
  se ad elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di B; ossia





- **Una funzione di A in B si dice "SURIETTIVA"**
  se ogni elemento di B ha almeno una controimmagine; ossia,





A VOLTE SI DICE "FUNZIONE" AL POSTO DI DIRE "VARIABILE DIPENDENTE"

Nell'uso comune, capita che la parola "funzione" venga adoperata quando a stretto rigore bisognerebbe invece dire "variabile dipendente". Ad es., può darsi che un testo, di fronte alla funzione $y = f(x) = x^2 + 3$, scriva: "qual è il valore di questa *funzione* per $x = 5$?"
oppure "questa *funzione* tocca il suo valore minimo quando $x = 0$, e tale valore minimo della funzione è 3".

In entrambi questi casi, l'uso della parola "funzione" è un pochettino improprio, perché ci si sta riferendo NON al "*legame*" fra la x e la y, BENSI' al *valore della y*,
quindi non tanto alla *funzione* quanto alla *variabile dipendente*.

Tuttavia, **è entrata nella prassi comune questa abitudine, di dire sbrigativamente "funzione" anche in casi nei quali per la precisione occorrerebbe in realtà dire "variabile dipendente". Tieni dunque conto di questa questione terminologica.**

Una funzione si dice "**reale di variabile reale**"
se tanto il suo insieme di partenza quanto il suo insieme di arrivo sono l'insieme $\mathbb{R}$.

Legge è sinonimo di funzione